

Equações Diofantinas: Lista 3

13/06/2015

Diego Marques

Problema 1. Encontre a solução minimal da equação

$$x^2 - 82y^2 = 1.$$

Problema 2. Encontre a solução minimal da equação

$$x^2 - 7y^2 = 1.$$

Problema 3. Encontre a solução minimal da equação

$$x^2 - 18y^2 = 1.$$

Problema 4. Encontre todas as soluções das equações anteriores.

Problema 5. Suponha que $N \in \mathbb{Z}^*$. Prove que se $x^2 - Dy^2 = N$ tem uma solução, então tem infinitas.

Problema 6. Prove que $x^2 - Dy^2 = -1$ não tem solução se $D \equiv 3 \pmod{4}$.

Problema 7. Seja D um inteiro positivo que não é quadrado perfeito. Se $k \in \mathbb{N}$, prove que existem infinitas soluções de $x^2 - Dy^2 = 1$ com $k \mid y$.

Problema 8. Prove que a equação

$$1 + \dots + n = m^2$$

tem infinitas soluções.

Problema 9. Prove que $n^2 + (n + 1)^2$ é quadrado perfeito para infinitos valores de n .

Problema 10. Prove que se D é divisível por algum primo $p \equiv 3 \pmod{4}$, então a equação $x^2 - Dy^2 = -1$ não tem solução.

Problema 11. Prove que a equação

$$x^3 + y^3 + z^2 = t^4$$

tem infinitas soluções (x, y, z, t) com $\text{mdc}(x, y, z, t) = 1$.

Problema 12. Prove que se $m = 2 + 2\sqrt{28n^2 + 1}$ é inteiro, então m é quadrado perfeito.

Problema 13. Encontre todos os triângulos retângulos com lados inteiros e catetos consecutivos.

Problema 14. Encontre todos os triângulos com lados inteiros e área inteira.

Problema 15. Prove que existem infinitos $n \in \mathbb{N}$ tais que $\lceil n\sqrt{2} \rceil$ é quadrado perfeito.